ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-5, ISSUE-5

Квазисимметричные свойства сопряжения гомеоморфизмов окружности с особенностями

У.А. Сафаров
Туринский политехнический университет в Ташкенте,
Кичик Халка Йули, 17, 100095, Ташкент, Узбекистан
safarovua@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются два P - гомеоморфизма окружности f_1 и f_2 с критической точкой и одинаковым иррациональным числом вращения ρ. Доказано, что отображение сопряжения ψ между f_1 и f_2 является квази-симметричной функцией.
Ключевые слова: P-гомеоморфизм, критическая точка, иррациональное число вращения, сопряжения, квази-симметрия.

Abstract. Consider two P-homeomorphisms f_1 and f_2 of the circle with a critical point and the identical irrational rotation number ρ. It is proved that the conjugation map ψ between f_1 and f_2 is a quasi-symmetric function.
Key words: P- homeomorphism, critical point, irrational rotation number, conjugacy, quasi-symmetry.

Введение

В настоящей работе изучаются сопряженные гомеоморфизмов окружности с особенностями, более точно-критические гомеоморфизмы окружности с бесконечным числом изломов.

Хорошо известно, что каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности S^1 задаётся формулой: $f(x)=\{F(x)\},\ x\in S^1$, где скобки $\{\cdot\}$ обозначают дробную часть числа, а $F(x)$- непрерывная, строго возрастающая функция на R^1, удовлетворяющая условию

$$F(x+1)=F(x)+1,\ \forall x\in R^1.$$

Функция $F(x)$ называется **поднятием** гомеоморфизма f. Обозначим через ρ_f число вращений гомеоморфизма f (см. [1]), т.е.

$$\rho_f=\lim_{n\to\infty}\frac{F^n(x)}{n}(\mathrm{mod}1).$$

Здесь и всюду в дальнейшем $F^n(x)$ обозначает n-ую итерацию функции $F(x)$. Значение предела ρ_f не зависит от выбора точки x. Число ρ_f является важнейшей числовой характеристикой гомеоморфизма f. А именно, если число вращений ρ_f иррационально, то гомеоморфизм f обладает единственной вероятностной инвариантной мерой P_f.

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-5, ISSUE-5

Пусть число вращений $\rho = \rho_f$ иррационально. Данжуа доказал [2], что если $f \in C^1(S^1)$ и $\underset{[0,1]}{var} \ln F'(x) < \infty$, то гомеоморфизм f топологически сопряжен линейным поворотом $f_\rho(x) = x + \rho(\mathrm{mod}1)$, т.е. существует гомеоморфизм окружности φ такой, что справедливо равенство

$$\varphi(f(x)) = f_\rho(\varphi(x)),\ x \in S^1.$$

Гомеоморфизм φ называется **сопрягающим отображением,** или просто **сопряжением**. Замечательным фактом является то, что сопряжение $\varphi\varphi$ является функцией распределения, соответствующей распределению $P_f\, P_f$, т.е. $\varphi(x) = P_f([0,x]),\quad x \in S^1$ $\varphi(x) = P_f([0,x]),\ x \in S^1$. Последнее соотношение показывает, что $\varphi\varphi$ является абсолютно непрерывной функцией тогда и только тогда, когда инвариантные распределения $P_f\, P_f$ являются абсолютно непрерывными относительно меры Лебега на окружности.

Анализ и результаты

Естественно, возникает вопрос о гладкости сопрягающего гомеоморфизма φ. Фундаментальные результаты по проблеме относительно гладкости φ были получены в работах В.И. Арнольда, Ю.Мозера, М. Эрмана, Ж.К. Йокоза, Я.Г. Синая и К.М. Ханина, Й. Кацнельсона и Д. Орнстейна.

Важным классом гомеоморфизмов окружности являются гомеоморфизмы с изломами, или класс P - гомеоморфизмов.

Определение 1. *Пусть f - гомеоморфизм окружности с поднятием F. Если в точке $a \in S^1$ существуют односторонние положительные производные $F'(a-0)$, $F'(a+0)$ и $F'(a-0) \neq F'(a+0)$, то $x = a$ называется точкой излома гомеоморфизма f.*

Число $\sigma_f(a) = \dfrac{F'(a-0)}{F'(a+0)}$ называется величиной излома гомеоморфизма f в точке $x = a$.

Определение 2. *Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности f с поднятием F называется P- гомеоморфизмом, если F удовлетворяет следующим условиям:*

1) F является дифференцируемым на S^1, за исключением конечного или счётного числа точек изломов;

2) существуют константы $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ такие, что

$$c_1 < F'(b-0), F'(b+0) < c_2 \text{ для } \forall b \in BP(f),$$

$$c_2 \leq F'(x) \leq c_2 \text{ для } \forall x \in S^1 \setminus \{BP(f)\},$$

где $BP(f)$ - множество всех точек изломов f.

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-5, ISSUE-5

3) $\ln F'$ *имеет конечную полную вариацию на* S^1*, т.е.* $v(F) = \operatorname{var}_{S^1} \ln F' < \infty$.

Свойства регулярности инвариантных вероятностных мер гомеоморфизмов окружности с изломами отличаются от свойств в случае диффеоморфизмов окружности. Инвариантные меры таких гомеоморфизмов изучены в работах М. Эрмана, А.А. Джалилова и К.М. Ханина, А.А. Джалилова, И. Лиусса и Д. Майера. Фундаментальные результаты по проблеме регулярности инвариантных мер были получены в работах А.А. Джалилова, Д. Майера и У.А. Сафарова([3]).

Другим важным классом гомеоморфизмов окружности с особенностями являются критические гомеоморфизмы.

Определение 3. *Точка* $x_{cr} \in S^1$ *называется критической точкой гомеоморфизма* f *порядка* $d > 2,\ d \in R$*, если существует некоторой* ω*- окрестности* $U_\omega(x_0),\ \omega > 0$*, такая что гомеоморфизм* f *может быть представлен в виде* $f(x) = \varphi(x)\,|\,\varphi(x)\,|^{d-1} + f(x_{cr})$*, где* $\varphi(x)$ *- это локальный диффеоморфизм класса* C^3*, удовлетворяющий* $\varphi(x_{cr}) = 0$.

Инвариантные меры критических гомеоморфизмов окружности изучались в работе Грачека и Свентека ([4]). Они доказали, что инвариантная мера гомеоморфизма $f \in C^3(S^1)$ с конечным числом критических точек полиномиального типа и иррациональным числом вращений является сингулярной относительно меры Лебега.

Рассмотрим гомеоморфизмы окружности f_1 и f_2 с особенностями и с одним и тем же иррациональным числом вращений ρ. Пусть φ_1 и φ_2 - сопрягающие отображения f_1 и f_2 соответственно с f_ρ, т.е. $\varphi_1 \circ f_1 = f_\rho \circ \varphi_1$ и $\varphi_2 \circ f_2 = f_\rho \circ \varphi_2$. Легко проверить, что отображение $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ является сопряжением f_1 и f_2.

В качественной теории гладких отображений важным является вопрос о гладкости сопрягающего гомеоморфизма ψ. Это называется свойством «жёсткости» гомеоморфизмов окружности с особенностями. Проблема «жёсткости» для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома изучалась в работах К.М. Ханина, Д. Хмелева и А. Тепленского, А.А. Джалилова, Х. Акина и С.Темира. Для таких гомеоморфизмов окружности эта проблема была решена до конца, в определенном смысле, в работах К.М. Ханина и С. Кошича([5]).

Сформулируем основной результат работы [5].

Теорема 1. *Для почти всех иррационально* $\rho \in (0,1)$*, любых двух* $C^{2+\alpha},\ \alpha \in (0,1)$ *гладкие* P*-гомеоморфизмы* $f_i,\ i = 1,2$ *с одинаковым числом вращений* ρ *и каждого с одной точкой излома* $x_b^{(i)},\ i = 1,2$*, таких, что* $\sigma_{f_1}(x_b^{(1)}) = \sigma_{f_2}(x_b^{(2)}) \neq 1$*, являются* C^1*-гладкими сопряженными друг к другу.*

Проблема «жёсткости» гомеоморфизмов окружности с несколькими изломами изучалась в работах Д. Смания и К. Куна([6]), А.А. Джалилова, Д. Майера и У.А. Сафарова([7]). Сформулируем основной результат работы [7].

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-5, ISSUE-5

Теорема 2. *Пусть* $f_i \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{b_i^{(k)}, k=\overline{1,m_i}\}),\ \ i=1,2$ *являются* P*- гомеоморфизмами окружности с* $m_i, m_i \geq 2$ *точками излома* $b_i^{(k)}, k=\overline{1,m_i}$*. Предположим, что*

1) их числа вращения совпадают, т.е. $\rho_{f_1} = \rho_{f_1} = \rho$ *и иррационально;*

2) произведения величин изломов f_1 *и* f_2 *не совпадают, т.е.*

$$\prod_{k=1}^{m_1} \sigma_{f_1}(b_1^{(k)}) \neq \prod_{s=1}^{m_2} \sigma_{f_2}(b_2^{(s)}) .$$

Тогда гомеоморфизм ψ*, сопрягающий* f_1 *и* f_2*, сингулярная функция.*

Проблема гладкости сопряжения ψ для критических гомеоморфизмов окружности изучена в работах Ж. Йоккоза, де Фария и де Мело, М. Ханина и А. Тепленского, а также др. Сформулируем основной результат работы А.Теплинского и К.Ханина [8].

Теорема 3. *Пусть* f_1 и f_2 *- аналитические критические гомеоморфизмы окружности с единственной критической точкой порядка* $(2l+1)$*,* $l \geq 1$*, и одинаковым иррациональным числом вращений* ρ*. Тогда между* f_1 и f_2 *существует* C^1 *- гладкое сопряжение.*

Определение 4. *Гомеоморфизм окружности* f *называется "квазисиммет-рическим", если существует константа* $K>0$*, такая, что для любого* $x \in S^1$ *и числа* $\delta \neq 0$ *справедливо следующее неравенство*

$$\frac{|f(x+\delta)-f(x)|}{|f(x)-f(x-\delta)|} < K .$$

Г. Свентека доказал (см. [9]), что сопряжение между гомеоморфизмом $f \in C^3(S^1)$ с конечным числом критических точек и иррациональным числом вращений ρ_f и линейным поворотом f_ρ является квазисимметрическим, тогда и только тогда, когда число вращений ρ_f - ограниченного типа. Эта результат было обобщен А.А. Джалиловым, М. С. Норани и С. Ахаткуловым [10] для критических гомеоморфизмов окружности с бесконечным числом изломов.

Сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема 4. *Пусть* $f_i,\ \ i=1,2$ *являются* C^3 *гомеоморфизмами окружности с одинаковым иррациональным числом вращений* ρ*. Предположим, что*

1) $f_i,\ \ i=1,2$ *имеют критическую точку* $x_{cr}^{(i)}$ *порядка* $d_i > 2$*;*

2) $f_i,\ \ i=1,2$ *являются* P*- гомеоморфизмами на множестве* $S^1 \setminus U_{\varepsilon_i}(x_{cr}^{(i)})$*, где* $U_{\varepsilon_i}(x_{cr}^{(i)}) = (x_{cr}^{(i)} - \varepsilon_i, x_{cr}^{(i)} + \varepsilon_i)$ *- некоторой* ε_i *-окрестности точка* $x_{cr}^{(i)}$*;*

Тогда гомеоморфизм ψ*, сопрягающий* f_1 *и* f_2 *- квази-симметрическая функция.*

Заключение. В данной работе доказано, что отображение

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-5, ISSUE-5

сопряжения между двумя P - гомеоморфизмами окружности с одинаковым иррациональным числом вращения является квази-симметричной функцией. Этот результат углубляет понимание структуры таких гомеоморфизмов в теории динамических систем. В дальнейшем представляется интересным исследовать квази-симметрию сопряжений в более общих классах отображений с критическими точками.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] Корнфельд И.П., Синай Г.Я., Фомин С.В. Эргодическая теория. - М.:Наука,1980.-384 с.

[2] Denjoy A. Sur les courbes definies par les equations differentielles a la surface du tore. Math. Pures et Appl.-1932.-№11.- P.333-375.

[3] Джалилов А.А., Майер Д, Сафаров У.А. Кусочно гладкие гомеоморфиз-мы окружности с несколькими изломами. Изв. РАН. Серия математическая.-2012.-№1(76)-С. 101-120.

[4] Graczyk J., Swiatek G. Singular measures in circle dynamics. Commun. Math. Phys.-1993.-№157.-P.213-230.

[5] Khanin K. and Kocic S. Abscence of robust rigidity for circle diffeomorphisms with breaks. Ann. Ins. H. Poincare Anal. Non Lineaire.-2013.- №30.-P.385-399.

[6] Cunha K. and Smania D. Rigidity for piecewise smooth homeomorphisms on the circle. Advan. in Math. -2014-№250.-P.193-226.

[7] Dzhalilov A.A., Mayer D. and Safarov U.A. On the conjugation of piecewise smooth circle homeomorphisms with a finite number of break points. Nonlinearity.-2015.-№28.-P.2441- 2459.

[8] Теплинский А.Ю., Ханин К.М. Жесткость для диффеоморфизмов окружности с особенностями// УМН.-2004.-№ (2).-С.137-160.

[9] Swiatek G. On critical circle homeomorphisms. Bol. Soc. Bras. Mat. Vol.-1998.- №29.- P.329-351.

[10] Dzhalilov A.A., Noorani M.S. and Akhatkulov S. On critical circle homeomorphisms with infinite number of break points. Hind. Publ. Corp. Abs. and Appl. Anal. Vol.-2014.-P.1-6.