ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-5, ISSUE-4

Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral tushunchasi

Buxoro davlat pedagogika institute Matematika va informatika yo‘nalishi talabasi

O‘ktamova Ferangiz Shuhratovna

Elementary function and the concept of indefinite integral

Student of Mathematics and Informatics Department, Bukhara State Pedagogical Institute

Uktamova Ferangiz Shuhratovna

Annotatsiya. Bu maqolada boshlang‘ich funksiya tushunchasi ochib berilgan bo‘lib, xossalari, topish qoidalari keltirilib o‘tilgan. Aniqmas integralni yechishning bo‘laklab va belgilab olish usuli bilan yechish misollar orqali keltirilib o‘tilgan.

Kalit so‘zlar: Boshlang‘ich funksiya, aniqmas inetegral, differensiallash, murakkab funksiya, trigonometrik funksiya.

Абстрактный. В статье объясняется понятие элементарной функции, приводятся ее свойства и описываются правила ее нахождения. Метод решения неопределенного интеграла путем его деления и определения проиллюстрирован на примерах.

Ключевые слова: Элементарная функция, неопределенный интеграл, дифференцирование, сложная функция, тригонометрическая функция.

Abstract. The article explains the concept of an elementary function, provides its properties and describes the rules for finding it. The method for solving an indefinite integral by dividing and defining it is illustrated with examples.

Keywords: Elementary function, indefinite integral, differentiation, complex function, trigonometric function.

Kirish.

Matematik analizning muhim bo‘limlaridan biri bu – integral hisobidir. Bu hisoblashlar orqali matematik va fizik hodisalarning chuqur mazmuni ochiladi. Ayniqsa, boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari fan va texnikaning turli sohalarida keng qo‘llaniladi. Masalan, harakat trayektoriyasini aniqlash, maydon yoki hajmni hisoblashda integral tushunchasi beqiyos ahamiyat kasb etadi.

Boshlang‘ich funksiya — bu berilgan funksiyaning hosilasi bo‘ladigan boshqa bir funksiyadir. Ayni vaqtda, aniqmas integral esa boshlang‘ich funksiyani topish usuli sifatida qaraladi. Bu maqolada ushbu tushunchalarning nazariy asosi, ularning o‘zaro aloqasi va amaliy hisoblash usullari tahlil qilinadi.

Adabiyotlar tahlili va metodologiya.

Agar nuqta harakat boshlanganidan boshlab t vaqt mobaynida S(t) masofani o‘tgan bo‘lsa, uning oniy tezligi S(t) funksiyaning hosilasiga teng ekanini bilasiz: V(t)=$S'(t)$. Amaliyotda teskari masala: nuqtaning berilgan harakat tezligi V(t) bo‘yicha uning bosib o‘tgan yo‘li S(t) ni topish masalasi ham uchraydi. Shunday S(t) funksiyani topish kerakki, uning hosilasi V(t) bo‘lsin. Agar V(t)=$S'(t)$bo‘lsa, S(t) funksiya V(t) funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deyiladi.

Ta’rif: f(x) funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deb, shunday F(x) funksiyaga aytiladiki, f(x) = $F'(x)$
o‘rinli bo‘ladi.

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-5, ISSUE-4

1-**misol:** f(x)=2x funksiya uchun boshlang'ich funksiyasi F(x)=x^2 bo'ladi. Chunki, F'(x) = $(x^2)'$= 2x = f(x)

Lekin f(x) = 2x funksiya uchun F_1(x) = x^2-3, F_2(x) = x^2+7, F_3(x) = $x^2 + 12$ funksiyalar ham boshlang'ich funksiyalar bo'ladi oladi. Chunki $(x^2-3)'$= 2x va hokazo.

Demak, f(x)=2x funksiyaning boshlang'ich funksiyalari cheksiz ko'p ekan va ular bir biridan faqat ozod hadi bilan farq qiladi. Shuning uchun f(x)=2x funksiyaning boshlang'ich funksiyasini umumiy holda F(x)=x^2+C deb qabul qilamiz. Bunda, C- ixtiyoriy o'zgarmas son.

Eslatma: Har qanday f(x) funksiyaning boshlang'ich funksiyalarini umumiy ko'rinishi F(x) + C bo'ladi.

Agar masalada f(x) funksiya biror M($x_0; y_0$) nuqtadan o'tuvchi boshlang'ich funksiyasini topish talab etilsa, C ning qiymatini aniqlash kerak bo'ladi.

1-misol: f(x)=cos x funksiyaning M($\frac{\pi}{6}$;4) nuqtadan o'tuvchi boshlang'ich funksiyasini toping.

Yechim: F(x)= sinx+C F($\frac{\pi}{6}$)=4 $\sin\frac{\pi}{6} + C = 4$ C=3,5

Javob: F(x)=sinx+3,5

Eslatma: Agar k o'zgarmas son bo'lsa, f(x)=k ning boshlang'ich funksiyasi F(x) = kx + C bo'ladi.

3-misol: f(x) = 5 bo'lsa, F(x) = 5x+C bo'ladi.

Aniqmas integral tushunchasi

f(x) funksiyaning boshlang'ich funksiyasi F(x) ga teng degan so'zni quyidagicha yozamiz: $\int f(x)dx$=F(x)+C

f(x) funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish f(x) funksiyaning aniqmas integralini topish degan ma'noni ham bildiradi va bu $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Integrallash chegarasi bo'lmaganligi uchun ham **aniqmas integral** deyiladi va boshlang'ich funksiyasi F(x)+C bo'ladi.

Integral so'zi lotinchadan olingan bo'lib, "tiklanish" degan ma'noni bildiradi.

4-misol: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna}$ + C, chunki hosilalar jadvaliga ko'ra,

($\frac{a^x}{lna}$ + C)'= $(a^x)' \cdot C'$ =$a^x \cdot \frac{1}{lna}$ · lna + 0= a^x

5-misol: $\int \frac{dx}{x}$ = ln$|x|$+C ekanligini ko'rsating.

x>0 da $\int \frac{dx}{x}$ = ln(x)+C, chunki $(lnx + C)'$=$\frac{1}{x}$ +0= $\frac{1}{x}$

x<0 da $\int \frac{dx}{x}$ = ln(-x)+C, chunki $(ln(-x) + C)'$=$\frac{1}{-x}$ + 0 = $\frac{1}{x}$.

Boshlang'ich funksiyani topish qoidasi

1-teorema: f(x) =x^p $(p \neq -1)$darajali funksiyaning boshlang'ich funksiyasi quyidagicha: F(x) = $\frac{x^{p+1}}{p+1}$+C

6-misol: a) f(x) = x^7, F(x) = $\frac{x^{7+1}}{7+1}$ + C = $\frac{x^8}{8}$ + C

b) f(x)=x, F(x)= $\frac{x^{1+1}}{1+1}$ +C= $\frac{x^2}{2}$ + C

c) f(x)= $\frac{1}{x^6} = x^{-6}$, F(x)= $\frac{x^{-3+1}}{-3+1}$ + C= $\frac{x^{-2}}{-2}$ + C= - $\frac{1}{2x^{-2}}$ + C

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-5, ISSUE-4

2-teorema: Agar f(x) funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi F(x) bo‘lsa, u holda f(kx+b) funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi $\frac{1}{k}F(kx+b)$+ C bo‘ladi.

7-misol: a) f(x) = $\frac{1}{\sin^2(3x-1)}$, F(x)= - $\frac{1}{3}$ctg$(3x-1)$+C

b) f(x) = $\sin(7x-11)$, F(x) = - $\frac{1}{7}\cos(7x-11)$+C

c) f(x) = 5^{2x+3}, F(x) = $\frac{5^{2x+3}}{2ln5}$ + C

d) f(x) = $\sqrt[3]{2x+1}$= $(2x+1)^{\frac{1}{3}}$, F(x) = $\frac{(2x+1)^{\frac{4}{3}}}{2\cdot\frac{4}{3}}$ + C = $\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{(2x+1)^4}$ + C

1-qoida: f(x) $\pm$ g(x) funksiyaning oshlang‘ich funksiyasi
F(x) $\pm$ G(x)+C

7-misol: a) f(x) = $x^2+\cos x-5$, F(x) = $\frac{x^3}{3}$ +sin x-5x+C

b) f(x) = $\frac{2}{x}$ + e^x - $\frac{1}{\sin^2(x)}$, F(x) = 2ln x + e^x - tan $x + C$

2-qoida: Agar f(x) funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi F(x) bo‘lsa, hamda a o‘zgarmas son bo‘lsa, u holda a · f(x) funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi
a · F(x)+C bo‘ladi.

8-misol: a) f(x) = 5cos x , F(x) = 5sin x+C

b) f(x) = $\frac{3}{x}$ - 4e^x , F(x) = 3ln x - 4e^x

Murakkab funksiyalar uchun boshlang‘ich funksiyani aniqlash

Eslatma: Yuqori darajali trigonometrik funksiyalarning boshlang‘ich funksiyasini topish uchun ularni darajalarini pasaytirib, so‘ngra boshlang‘ich funksiyasi topiladi.

8-misol: a) f(x)= $\sin^2 x$=$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, F(x)=$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x$+ C

b) f(x)= $\cos^2 x$ =$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$, F(x)=$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$+ C

c) f(x)= tg^2 x = 1- $\frac{1}{\cos^2 x}$, F(x)= x - tgx+C

d) f(x) = ctg^2 x = $\frac{1}{\sin^2 x}$ -1, F(x)-x-tgx+C

Eslatma: f(x)= $\sin kx\cdot\cos tx$, f(x)= $\cos kx\cdot\cos zx$, f(x)= $\sin kx\cdot sintx$ ko‘rinishli funksiyalarni ko‘paytmadan yig‘indiga o‘tib, so‘ngra boshlang‘ich funksiyasi topiladi.

O‘zgaruvchini almashtirish usuli

Ushbu usul jadvalda ko‘rsatilmagan integrallarni jadvaldagi biror ko‘rinishga keltirib hisoblash maqsadida foydalaniladi. Usulning asosida murakkab fiunksiyani differensiallash qoidasi yotadi.

9-misol: $\int x^3\cos(x^4)dx$ integralni hisoblang.

Yechim: $(x^4)'$ = $4x^3$ bo‘lganligidan x^4 = t deb alamshtirish kiritamiz. U holda

d(x^4) = dt yoki 4x^3dx = dt va bundan x^3dx = $\frac{dt}{4}$, u holda

$\frac{1}{2}\int\cos tdt=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin(x^4)+C.$

10-misol: $\int\frac{\sin x}{(\cos x)^4}$ dx I tegralni hisoblang.

Yechim: $\sin xdx=-d(\cos x)$; $\cos x = t$ almashtirishni kiritamiz.

$\int\frac{\sin x}{(\cos x)^4}$ dx = -$\int\frac{d(\cos x)}{t^4}$ = -$\int\frac{dt}{t^4}$ = -$\int t^{-4}$dt = - $\frac{t^3}{-3}$ + C = $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(\cos x)^3}$ + C.

11-misol: $\int\frac{xdx}{x^2+8}$ integralni hisoblang.

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-5, ISSUE-4

$x^2 + 8 = u$ deyilsa, du $=$ 2xdx, xdx $= \frac{1}{2}$ du bo‘ladi. U holda

$\int \frac{xdx}{x^2+8} = \frac{1}{2}\int udu = \frac{1}{2}\ln u + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+8) + C.$

Bo‘lablab integrallash usuli

u = u(x) va v = v(x) funksiyalar differensiallanuvchi bo‘lsin:

$\int udv = uv - \int vdu$ (1)

(1) formula **bo‘laklab integralash formulasi.**

12-misol: $\int \ln xdx$ integralni hisoblang.

Yechim: Bunda u = $\ln x$, dv = dx ekanligidan du = $\frac{1}{x}$, v = x

$\int \ln xdx = x \cdot \ln x - \int 1dx = x\ln x - x + C$

13-misol: $\int xe^x\,dx$ integralni hisoblang.

Yechim: u = x , dv = $e^x dx$ deb olamiz. Bundan du = dx , v = e^x. Formulaga asosan

$\int xe^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C.$

Eslatma: Bo‘laklab integrallash usuli o‘zgruvchilarni almashtirish usuliga nisbatan qo‘llash sohasi torroq bo‘lsada, lekin shu usul orqali ko‘plab integrallar hisoblanadi.

Masalan: $\int x^k \cdot e^{ax}dx$, $\int x^k \cdot \ln^m xdx$, $\int arcsinxdx$

O‘zbek adabiyotlar tahlili va metodologiyasi

O‘zbekistonda matematik analiz va xususan, integral hisob masalalarini o‘rganishga bag‘ishlangan ko‘plab ilmiy va o‘quv adabiyotlar yaratilgan. Bu borada quyidagi asosiy manbalar alohida ahamiyat kasb etadi:

1. A.Toshmatov, A.Ibrohimov – “Matematik analiz” (1 va 2 qismlar) – ushbu adabiyotida integral tushunchasining nazariy asosi, boshlang‘ich funksiya va aniqmas integralning xossalari keng yoritilgan.
2. M.Jo‘rayev – “Oliy matematika asoslari” – bu kitobida aniqmas integral va uning amaliy qo‘llanishi haqida chuqur tahlil berilgan.
3. S.Karimov – “Matematik analizdan misollar va masalalar” – bu to‘plamda boshlang‘ich funksiyani topish va integral hisoblash bo‘yicha ko‘plab misollar jamlangan.

Metodologiya:

Maqolada nazariy-analitik yondashuv asosida mavzu yoritildi. Ya’ni:

- Matematikaning klassik nazariylariga asoslangan holda boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari izohlandi;
- O‘zbekcha ilmiy va o‘quv adabiyotlar asosida tahlil qilindi;
- Tushunchalarning real matematik va amaliy masalalardagi qo‘llanilishi misollar orqali ko‘rsatildi.

Natija va muhokamalar

Tahlil natijalariga ko‘ra, boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari o‘zaro bevosita bog‘liq bo‘lib, har bir differensiallangan funksiyaga mos bir nechta boshlang‘ich funksiyalar mavjud bo‘ladi (farqi faqat doimiyga teng). Bu, o‘z navbatida, aniqmas integralning doimiy qo‘shiluvchi bilan ifodalanishini taqozo etadi.

Muhokamalar davomida quyidagi asosiy jihatlar aniqlangan:

- Ayni bir funksiya bir nechta boshlang‘ich funksiyaga ega bo‘lishi mumkin, bu matematik analizda muhim nazariy holatdir;

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 9.948 / 2024

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-5, ISSUE-4

- Aniqmas integral amaliy masalalarda, ayniqsa, fizikada (tezlik, masofa, ish, kuch va h.k.) keng qo‘llaniladi;
- Talabalar o‘rtasida bu mavzuni o‘zlashtirishda asosiy qiyinchilik – boshlang‘ich funksiyani to‘g‘ri aniqlash va doimiylarni to‘g‘ri hisoblashda yuzaga keladi.

Xulosa

Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari matematik analizning asosi hisoblanadi. Ushbu tushunchalarni chuqur o‘zlashtirish orqali talabalar nafaqat nazariy bilimga ega bo‘ladilar, balki uni amaliy masalalarda qo‘llash ko‘nikmasini ham rivojlantiradilar. O‘zbek adabiyotlarida bu mavzu yetarlicha yoritilgan bo‘lsa-da, tushunchalarni real hayotdagi misollar bilan mustahkamlash zarur. Bu esa matematik tafakkurni shakllantirishda muhim omil hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Algebra va analiz asoslari. O‘rta maktabing 11-sinf darsligi.
2. Abduhanidov A. U., Nasimov X. A. Alegra va sonlar nazariyasi asoslari. I qism. Akademik litsey uchun o‘quv qo‘llanma,-T., 2000.
3. Nasimov X. va boshqalar Algebra va sonlar asoslari fanidan masallar to‘plami.
4. Mavzulashtirilgan testlar to‘plami. 1996-2003
5. Matematikadan masallar to‘plami M.I.Skanavi.
6. Nasimov X. va boshqalar. Algebra va sonlar nazariyasi
7. . http://www.khanakademy.org - “Xon akademiyasi” masofaviy ta’lim sayti (ingliz)
8. https://uz.wikipedia.org/wiki/Aniqmas_integral
9. https://staff.tiiame.uz/storage/users/691/presentations/E7sUQptJeopYWHaQjpbXpysZ2gyE6E0Llthw2lou.pdf